

¹ Contrôle continu N° 1

Questions de cours :

- Enoncer la définition de suite récurrente et des suites adjacentes
- Enoncer le théorème de Rolle
- Enoncer le théorème des accroissements finis et donner une démonstration

Exercice 1: Trouver les limites suivantes:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan nx - n \tan x}{n \sin x - \sin nx}$ ($n > 1$); b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(e^{\frac{1}{x}} - 1)}{1 + x^2}$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(chx - 1) \tan x}{x \ln(1 + x + x^2)}$

Exercice 2. Soient (u_n) , (v_n) deux suites définies pour $n \geq 2$ par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1^2 2^2} + \frac{1}{2^2 3^2} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2 n^2} \quad v_n = u_n + \frac{1}{3n^3}$$

Montrer que elles sont adjacentes.

Exercice 3.

- Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|\sin x| \leq |x|$.
- Démontrer que $(\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2) (|\sin u - \sin v| \leq |u - v|)$.
- Soient a et b deux nombres réels tels que $0 < a < 1$ et une suite (x_n) définit par:

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = a \sin x_n + b \quad \text{si } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- Démontrer que si $n \geq 1$, on a: $|x_{n+1} - x_n| \leq a^n |x_1 - 1|$
- Démontrer que pour tout couple $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, vérifiant $m \geq n$, on a:

$$|x_m - x_n| \leq \frac{a^n}{1-a} |x_1 - 1|$$

- Déduire que la suite (x_n) est convergente.

¹Aucun document n'est autorisé

Exercice 4.

1) Rappeler l'allure du graphe de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arctg}(x)$ et préciser le signe de la fonction $\operatorname{Arctg}(u) - u$ pour $u > 0$.

2) Soit f une fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{Ln}(\operatorname{Arctg}(e^x)); & x \leq 0 \\ \operatorname{th}(x^2) + \operatorname{Ln}(\frac{\pi}{4}); & x > 0 \end{cases}$$

2.1) Vérifier que f est bien définie sur \mathbb{R} . Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .

2.2) a) Calculer $f'(x)$ pour $x < 0$ et $f'(x)$ pour $x > 0$.

b) Calculer, pour $x > 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \operatorname{Ln}(\frac{\pi}{4})}{x}$$

La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

3) Dresser le tableau de variation de f .

Formulaire

$$\operatorname{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}; \quad (\operatorname{th}(u))' = \frac{u'}{\operatorname{ch}^2(u)}$$

$$(\operatorname{Arctg}(u))' = \frac{u'}{1+u^2}; \quad \operatorname{Ln}(\frac{\pi}{4}) = -0.241...$$

Questions de Cours

a / suite récurrente : Toute suite définie par la donnée des premiers termes et une relation de récurrence entre des termes consécutifs

suite adjacente : 2 suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes si $(U_n) \uparrow$, $(V_n) \downarrow$ et $\lim U_n - V_n = 0$ et $\forall n: U_n < V_n$

b / T: Rolle: f cont sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, $f(a) = f(b)$ alors $\exists c \in]a, b[/ f'(c) = 0$

c / f continue sur $[a, b]$, f dérivable sur $]a, b[$ alors $\exists c \in]a, b[/ f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$

Dem: On considère la fonction $g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot x$ et on utilise le th de Rolle à g

Exercice 1

a / $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan nx - n \tan x}{n \sin x - \sin nx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{n(1 + \tan^2 nx) - n(1 + \tan^2 x)}{n \cos x - \cos nx} = \frac{0}{0} = 0$

b / $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(e^{1/n} - 1)}{1 + n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(e^{1/n} - 1)}{n^2(1 + 1/n^2)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{1/n} - 1}{1/n} \cdot \frac{1}{1 + 1/n^2} = 1 \times 1 = 1$

c / $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{(ch_{n-1}) \tan x}{n \ln(1 + n + n^2)} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\tan x}{n} \cdot \frac{n + n^2}{\ln(1 + n + n^2)} \cdot \frac{ch_{n-1}}{n + n^2} = 1 \times 1 \times 0 = 0$

car $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{ch_{n-1}}{n + n^2} = \frac{0}{0} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{sh_n}{1 + 2n} = 0$

Exercice 2 • $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n^2(n+1)^2} > 0 \Rightarrow (U_n)$ croissante

• $V_{n+1} - V_n = U_{n+1} + \frac{1}{3(n+1)^3} - U_n - \frac{1}{3n^3} = \frac{1}{n^2(n+1)^2} + \frac{1}{3(n+1)^3} - \frac{1}{3n^3} = \frac{3n^2 + 3n + n^3 - n^3 - 3n^2 - 3n - 1}{3n^3(n+1)^3} = -\frac{1}{3n^3(n+1)^3} < 0 \Rightarrow (V_n)$ décroissante

• $V_n - U_n = \frac{1}{3n^3} > 0$ et $\lim V_n - U_n = 0$ d'où le résultat

Exercice 3

a/ $f(x) = \sin x$

f cont sur $[0, x]$, dérivable sur $]0, x[$ donc d'après le T.A.F

$$\exists \theta \in]0, x[/ f(x) - f(0) = (x-0)f'(\theta)$$

$$\sin x = x \cos \theta \Rightarrow |\sin x| = |x \cos \theta| \leq |x| \text{ car } |\cos \theta| \leq 1$$

b/ De même f cont sur $[u, v]$, dérivable sur $]u, v[$ $\exists \theta \in]u, v[$

$$/ f(u) - f(v) = (u-v)f'(\theta)$$

$$\sin u - \sin v = (u-v) \cos \theta \Rightarrow |\sin u - \sin v| \leq |u-v|$$

c1/ $|x_{n+1} - x_n| = |(a \sin x_n + b) - (a \sin x_{n-1} + b)| = a |\sin x_n - \sin x_{n-1}|$

d'après b/ $|x_{n+1} - x_n| \leq a |x_n - x_{n-1}|$

On a $|x_2 - x_1| \leq a |x_1 - x_0|$
 $|x_3 - x_2| \leq a |x_2 - x_1|$
 \vdots
 $|x_{n+1} - x_n| \leq a |x_n - x_{n-1}|$

en faisant le produit membre à membre on obtient

$$\Rightarrow |x_{n+1} - x_n| \leq a^n |x_1 - x_0|$$

car $|x_{n+1} - x_n| \leq a^n |x_1 - 1|$

c2/ $|x_m - x_n| = |x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - x_{m-2} + \dots + x_{n+1} - x_n|$
 $\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \dots + |x_{n+1} - x_n|$
 $\leq (a^{m-1} + a^{m-2} + \dots + a^n) |x_1 - 1|$
 $\leq a^n |x_1 - 1| (1 + a + a^2 + \dots + a^{m-n-1})$
 $\leq a^n |x_1 - 1| \left(\frac{1 - a^{m-n}}{1 - a} \right) \leq \frac{a^n}{1 - a} |x_1 - 1| \text{ car } 1 - a^{m-n} \leq 1$

c3/ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{1-a} |x_1 - 1| = 0$ car $0 < a < 1$ d'où

pour $\varepsilon > 0$ $\exists N > 0 / \forall n > N: \frac{a^n}{1-a} |x_1 - 1| < \varepsilon$

d'où $\forall m > n > N: |x_m - x_n| \leq \frac{a^n}{1-a} |x_1 - 1| < \varepsilon$

Ainsi (x_n) est une suite de Cauchy

donc (x_n) est convergente



ETUSUP.com

Programmmation
Cours
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Livres
Exercices
Contrôles Continus
Langues
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Chimie Organique
Informatique
Optique
Chimie
Diapo
Algèbre
Corrigés
Mathématiques
Mécanique
Travaux Pratiques
Droit

et encore plus..